Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2024

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых пяти подряд идущих натуральных чисел?

Решение. Из пяти подряд идущих натуральных чисел как минимум два числа делятся на 2, при этом хотя бы одно из них делится на 4. Как минимум одно делится на 3 и ещё одно – на 5. Следовательно произведение делится на 8, 3 и 5. А значит, на 120. Больше быть не может, так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? Ответ обоснуйте.

Решение. В восьмеричной системе счисления число из условия задачи имеет вид $A = 1 + 8 + 8^2 + \cdots + 8^n$. $8^{2k-1} \equiv (-1)(mod\,9)$, $8^{2k} \equiv 1(mod\,9)$.

Следовательно, при чётном n остаток от деления числа A на n равен 1, при нечётном равен.0.

Ответ: 0 или 1.

3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 3$ и $AD = 7$, отмечены 11 точек $K_1, K_2, \dots, K_{11}$, разбивающие сторону AB на 12 равных отрезков, то есть $AK_1 = K_1K_2 = \cdots = K_{10}K_{11} = K_{11}B$. Затем через точки $K_1, K_2, \dots, K_{11}$ провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые пересекли сторону CD соответственно в точках $T_1, T_2, \dots, T_{11}$. Найдите сумму длин получившихся одиннадцати отрезков $K_1T_1, \dots, K_{11}T_{11}$.

Решение. Обозначим длины отрезков из условия задачи последовательно от меньшего основания к большему $s_1, s_2, \dots, s_{11}$. Тогда, по свойству средней линии трапеции, очевидно, что $\frac{s_1+s_{11}}{2} = \frac{s_2+s_{10}}{2} = \cdots = \frac{s_5+s_7}{2} = s_6 = 5$. Следовательно, $s_1 + s_2 + \cdots + s_{11} = 55$.

Ответ: 55.

4. Пусть $A = 1111$. Найдите остаток от деления числа $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ на число 1234321.

Решение. Найдём A^2: $(1111)^2 = 1234321$. Заметим, что выражение $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ будет содержать только чётные степени числа A и свободный член равен 2. Тогда по свойствам остатков, остаток от деления числа $(A+1)^{2024}+(A-1)^{2024}$ на число 1234321 равен 2.

Ответ: 2.

5. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2+6xy+3y^2-2x-y=2 \\ 3x^2+6xy-x+y=-1/2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$.

Найдите сумму $x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3+x_4+y_4$.

Решение. Данная система линейна относительно x и x^2. Находим

$$x=\frac{6y^2-8y-7}{2(12y-1)},\qquad x^2=-\frac{6y^3-5y^2-4y+1}{12y-1}.$$

Возведя первое уравнение в квадрат, получим уравнение 4-й степени для определения y:

$$324y^4-360y^3-192y^2+176y+45=0.$$

Корнями этого уравнения являются числа y_1,y_2,y_3,y_4. По теореме Виета их сумма равна $y_1+y_2+y_3+y_4=\frac{360}{324}=\frac{10}{9}$.

Аналогично, разрешив исходную систему относительно y и y^2, получим

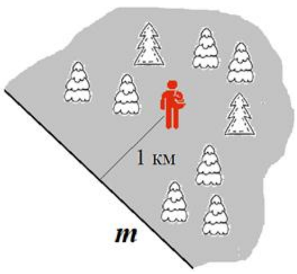
$$324x^4+72x^3-120x^2-40x-1=0.$$

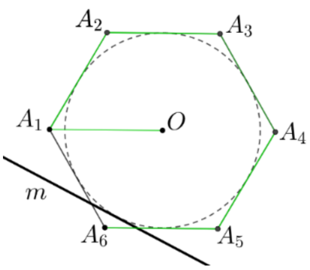
Отсюда $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{72}{324}=-\frac{2}{9}$.

Таким образом, искомая сумма равна $\frac{10}{9}-\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

Ответ: $\frac{8}{9}$.

6. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m. Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.





Решение. Проведем окружность радиуса 1 с центром в точке O, где сейчас находится путник. Эта окружность, касается прямой m. Опишем вокруг окружности правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Очевидно, что хотя бы одна его вершина окажется или на границе леса, или за его пределами (в нашем случае это A_6). Значит, побывав во всех вершинах шестиугольника, путник гарантированно из леса выйдет. Для этого надо из точки O сначала пройти в какую-либо вершину шестиугольника (например, в A_1), а затем идти вдоль ***пяти*** его сторон. Длина этого пути равна $OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

10 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых пяти подряд идущих натуральных чисел?

Решение. Из пяти подряд идущих натуральных чисел как минимум два числа делятся на 2, при этом хотя бы одно из них делится на 4. Как минимум одно делится на 3 и ещё одно – на 5. Следовательно произведение делится на 8, 3 и 5. А значит, на 120. Больше быть не может, так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? Ответ обоснуйте.

Решение. В восьмеричной системе счисления число из условия задачи имеет вид $A = 1 + 8 + 8^2 + \cdots + 8^n . 8^{2k-1} \equiv (-1)(mod\ 9)$, $8^{2k} \equiv 1(mod\ 9)$.

Следовательно, при чётном n остаток от деления числа A на n равен 1, при нечётном равен.0.

Ответ: 0 или 1.

3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 3$ и $AD = 7$, отмечены 11 точек $K_1, K_2, \dots, K_{11}$, разбивающие сторону AB на 12 равных отрезков, то есть $AK_1 = K_1K_2 = \cdots = K_{10}K_{11} = K_{11}B$. Затем через точки $K_1, K_2, \dots, K_{11}$ провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые пересекли сторону CD соответственно в точках $T_1, T_2, \dots, T_{11}$. Найдите сумму длин получившихся одиннадцати отрезков $K_1T_1, \dots, K_{11}T_{11}$.

Решение. Обозначим длины отрезков из условия задачи последовательно от меньшего основания к большему $s_1, s_2, \dots, s_{11}$. Тогда, по свойству средней линии трапеции, очевидно, что $\frac{s_1+s_{11}}{2} = \frac{s_2+s_{10}}{2} = \cdots = \frac{s_5+s_7}{2} = s_6 = 5$. Следовательно, $s_1 + s_2 + \cdots + s_{11} = 55$.

Ответ: 55.

4. Пусть $A = 1111$. Найдите остаток от деления числа $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ на число 1234321.

Решение. Найдём A^2: $(1111)^2 = 1234321$. Заметим, что выражение $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ будет содержать только чётные степени числа A и свободный член равен 2. Тогда по свойствам остатков, остаток от деления числа $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ на число 1234321 равен 2.

Ответ: 2.

5. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - y = 2 \\ 3x^2 + 6xy - x + y = -1/2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

Найдите сумму $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4$.

Решение. Данная система линейна относительно x и x^2. Находим

$$x = \frac{6y^2 - 8y - 7}{2(12y - 1)}, \qquad x^2 = -\frac{6y^3 - 5y^2 - 4y + 1}{12y - 1}.$$

Возведя первое уравнение в квадрат, получим уравнение 4-й степени для определения y:

$$324y^4 - 360y^3 - 192y^2 + 176y + 45 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа y_1, y_2, y_3, y_4. По теореме Виета их сумма равна $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{360}{324} = \frac{10}{9}$.

Аналогично, разрешив исходную систему относительно y и y^2, получим

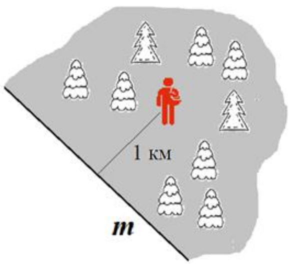
$$324x^4 + 72x^3 - 120x^2 - 40x - 1 = 0.$$

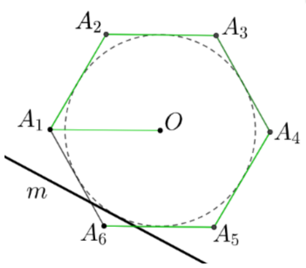
Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{72}{324} = -\frac{2}{9}$.

Таким образом, искомая сумма равна $\frac{10}{9} - \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.

Ответ: $\frac{8}{9}$.

6. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m. Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.





Решение. Проведем окружность радиуса 1 с центром в точке O, где сейчас находится путник. Эта окружность, касается прямой m. Опишем вокруг окружности правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Очевидно, что хотя бы одна его вершина окажется или на границе леса, или за его пределами (в нашем случае это A_6). Значит, побывав во всех вершинах шестиугольника, путник гарантированно из леса выйдет. Для этого надо из точки O сначала пройти в какую-либо вершину шестиугольника (например, в A_1), а затем идти вдоль ***пяти*** его сторон. Длина этого пути равна $OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

11 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых шести подряд идущих натуральных чисел?

Решение. Из шести подряд идущих натуральных чисел три числа делятся на 2, при этом хотя бы одно из них делится на 4. Два числа делятся на 3 и ещё одно – на 5. Следовательно произведение делится на 16, 9 и 5. А значит, на 720. Больше быть не может, так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ: 720.

2. Пусть $A = 11111$.Найдите остаток от деления числа $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ на число 123454321. Ответ обоснуйте.

Решение. Найдём A^2: $(11111)^2 = 123454321$. Заметим, что в выражении $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ коэффициент при первой степени A обнулится. Тогда по свойствам остатков, остаток от деления числа $(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$ на число 123454321 равен 2.

Ответ: 2.

3. Докажите неравенство $\log_2\left(1 + \frac{1}{2023}\right) + \log_2\left(2 - \frac{1}{2024}\right) > 1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}$.

Решение. Докажем, что $\log_2\left(1 + \frac{1}{2023}\right) > \frac{1}{2023}$. После элементарных преобразований получим сравнение числа $\left(1 + \frac{1}{2023}\right)^{2013}$ и числа 2. Очевидно, что первое число больше второго. Неравенство $\log_2\left(2 - \frac{1}{2024}\right) > 1 - \frac{1}{2024}$ доказывается аналогично предыдущему заменой $\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2024}$.

4. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 3y^2 - x + y = 6 \\ -4xy - x - y = 2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

Найдите сумму $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4$.

Решение. Данная система линейна относительно x и x^2. Находим

$$x = \frac{3y^2 - 2y + 2}{6y - 1}, \qquad x^2 = -\frac{36y^3 - 15y^2 - 33y + 4}{3(6y - 1)}.$$

Возведя первое уравнение в квадрат, получим уравнение 4-й степени для определения y:

$$243y^4 - 162y^3 - 135y^2 + 33y + 8 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа y_1, y_2, y_3, y_4. По теореме Виета их сумма равна $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{162}{243} = \frac{2}{3}$.

Аналогично, разрешив исходную систему относительно y и y^2, получим

$$81x^4 - 207x^2 - 35x + 86 = 0.$$

Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Таким образом, искомая сумма равна $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

5. Сравните числа $(tg1^\circ + tg2^\circ + \dots + tg44^\circ)$ и 22.

Решение. Пусть $\alpha + \beta = 45^\circ$, $0 < \alpha, \beta < 45^\circ$. Тогда $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot cos\alpha \cdot cos\beta}$. Далее оценим $cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

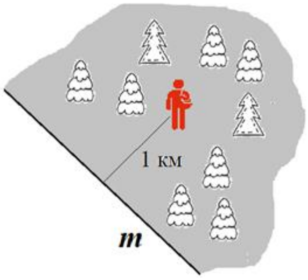
Так как $\alpha + \beta = 45^\circ$, $0 < \alpha, \beta < 45^\circ$, то $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(\alpha-\beta) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Следовательно, $cos\alpha \cdot cos\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $tg\alpha + tg\beta < 1$. А тогда $tg1^\circ + tg2^\circ + \dots + tg44^\circ = (tg1^\circ + tg44^\circ) + (tg2^\circ + tg43^\circ) + \dots + (tg22^\circ + tg23^\circ) < 22$.

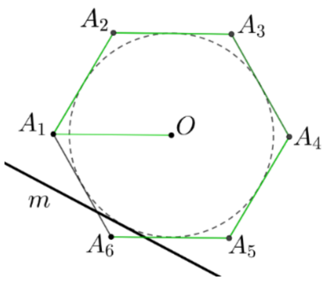
6. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, решениями которой были бы все такие пары целых чисел (x, y), которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \le 1000 - x^2 \\ y \ge x^2 \end{cases}$. Других решений у системы быть не должно.

Замечание. Уравнения системы должны быть компактными выражениями (без знаков суммирования, троеточий и т.п.), в записи которых, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак $=$, стандартные арифметические операции и элементарные функции из школьной программы.

Решение. Пример системы: $\begin{cases} (\sin(\pi x))\left(1+\sqrt{y-x^2}\right)=0 \\ (\sin(\pi y))\left(1+\sqrt{1000-y-x^2}\right)=0 \end{cases}$.



7. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m. Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.



Решение. Проведем окружность радиуса 1 с центром в точке O, где сейчас находится путник. Эта окружность, касается прямой m. Опишем вокруг окружности правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Очевидно, что хотя бы одна его вершина окажется или на границе леса, или за его пределами (в нашем случае это A_6). Значит, побывав во всех вершинах шестиугольника, путник гарантированно из леса выйдет. Для этого надо из точки O сначала пройти в какую-либо вершину шестиугольника (например, в A_1), а затем идти вдоль ***пяти*** его сторон. Длина этого пути равна $OA_1+A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5+A_5A_6=\frac{2}{\sqrt{3}}+5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

9 КЛАСС

1. 120.
2. 0 или 1
3. 55
4. 2
5. $\frac{8}{9}$.
6. См. решение

10 КЛАСС

1. 120.
2. 0 или 1
3. 55
4. 2
5. $\frac{8}{9}$.
6. См. решение

11 КЛАСС

1. 720
2. 2
3. См. решение
4. $\frac{2}{3}$.
5. См. решение
6. См. решение
7. См. решение

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

1. Решите уравнение в целых числах $3^{x+y} = 6 \cdot 3^x + 3^y$.

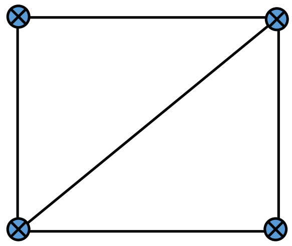
2. Данное натуральное число N раскладывается на сумму нескольких последовательных целых чисел. Найти число всех таких разложений для N=500. Примечание. Считаем, что последовательности вида 0, 1, 2, ……, n различные, а также, что может быть последовательность из одного числа, т.е. N – это тоже последовательность.

3. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;
б) с помощью пункта (а) найдите $f(x_0)$, где
$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x$.
Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа. В поле ответ запишите найденные числа через точку.

4. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся 1 очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

5. Обозначим $a = 729$, $b = 241$, $N = 7169$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

6. Компьютеры соединены в сеть, как показано на рисунке. Для этого использовали пять соединительных проводов. Злоумышленник пытается перерезать каждый провод. Вероятность того, что провод будет перерезан равна $\frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что в результате таких действий целостность сети не нарушится, то есть каждый компьютер сможет обменяться информацией с каждым (возможно и по цепочке с другими компьютерами).



7. В треугольнике ABC угол BAC равен 14°, а угол ACB равен 31°. На стороне AC взята точка P так, что угол ABP – прямой. Пусть AQ – биссектриса треугольника ABC. Найдите угол QPC.

8. Найти наименьшее натуральное k такое, что

1) 17 делит $2^k - 1$;
2) 289 делит $2^k - 1$.

В поле «Ответ» записать сумму найденных чисел.

10 КЛАСС

1. Решите уравнение в целых числах $3^{x+y} = 6 \cdot 3^x + 3^y$.

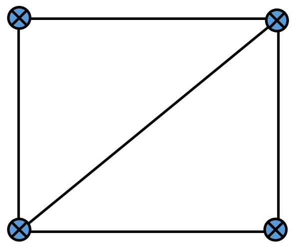
2. Данное натуральное число N раскладывается на сумму нескольких последовательных целых чисел. Найти число всех таких разложений для N=500. Примечание. Считаем, что последовательности вида 0, 1, 2, ……, n различные, а также, что может быть последовательность из одного числа, т.е. N – это тоже последовательность.

3. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;
б) с помощью пункта (а) найдите $f(x_0)$, где
$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x$.
Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа. В поле ответ запишите найденные числа через точку.

4. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся 1 очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

5. Обозначим $a = 729$, $b = 241$, $N = 7169$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

6. Компьютеры соединены в сеть, как показано на рисунке. Для этого использовали пять соединительных проводов. Злоумышленник пытается перерезать каждый провод. Вероятность того, что провод будет перерезан равна $\frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что в результате таких действий целостность сети не нарушится, то есть каждый компьютер сможет обменяться информацией с каждым (возможно и по цепочке с другими компьютерами).



7. В треугольнике ABC угол BAC равен 14°, а угол ACB равен 31°. На стороне AC взята точка P так, что угол ABP – прямой. Пусть AQ – биссектриса треугольника ABC. Найдите угол QPC.

8. Найти наименьшее натуральное k такое, что

1) 17 делит $2^k - 1$;

2) 289 делит $2^k - 1$.

В поле «Ответ» записать сумму найденных чисел.

11 КЛАСС

1. Про пятиугольник $ABCDE$ известно, что AB=BC=CD=DE. $(< C =< D = 108^{o}$ и угол $< B$ равен 96^{o} . Найдите угол E. Ответ запишите в градусах.

2. Найти наименьшее натуральное k такое, что
1) делит $2^k - 1$;
2) 289 делит $2^k - 1$;
3) 4913 делит $2^k - 1$.
В поле «Ответ» записать сумму найденных чисел.

3. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

4. Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;
б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где
$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x$.
Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа. В поле «Ответ» запишите найденные числа через точку: a.b

5. Обозначим $a = 3481$, $b = 4120$, $N = 26069$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

6. Данное натуральное число N раскладывается на сумму нескольких последовательных чисел. Найти число всех таких разложений для $N = 2^5 * 3^{10} * 11^8$. Примечание. Считаем, что последовательности вида 0, 1, 2, ……, n различные, а также, что может быть последовательность из одного числа, т.е. N – это тоже последовательность.

7. Решите уравнение в целых числах

$$136 * \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

В поле ответ запишите покоординатную сумму найденных точек. Например, если уравнению удовлетворяют точки $(x_1, y_1) = (5,6)$; $(x_2, y_2) = (7,8)$, тогда в поле «Ответ» должно быть записано: «12.14».

8. Найдите количество целых решений уравнения на отрезке $[1; 90]$.

$$sin(\pi \cdot log_2 x) + cos(\pi \cdot log_2 x) = 1$$